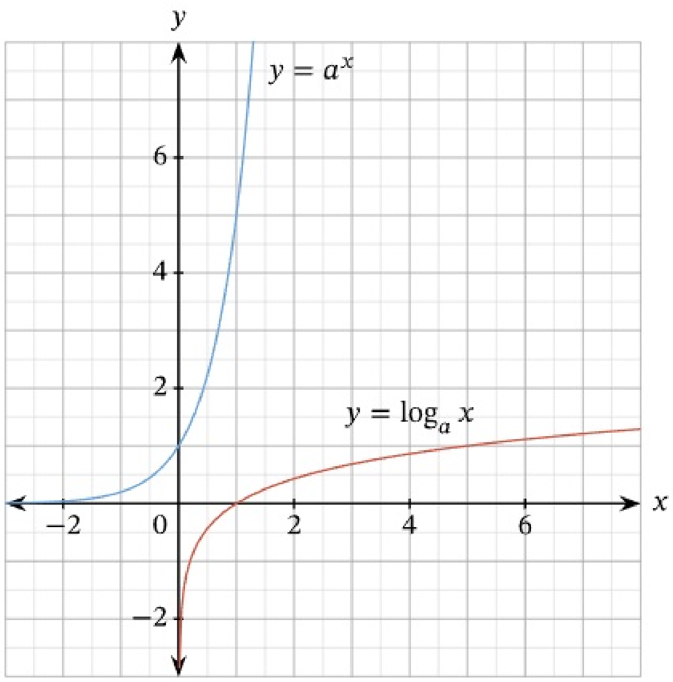
5 Fonction logarithme décimal

1. Définition et premières propriétés

Définition 5.1 On appelle logarithme de base a la **fonction réciproque** ("la marche arrière") de l'exponentielle de base a.



Définition 5.2 En particulier le **logarithme décimal** la **fonction réciproque** ("la marche arrière") de l'exponentielle de base 10. On le note $log(x)$.

Par exemple, $log(10^2) = 2$.

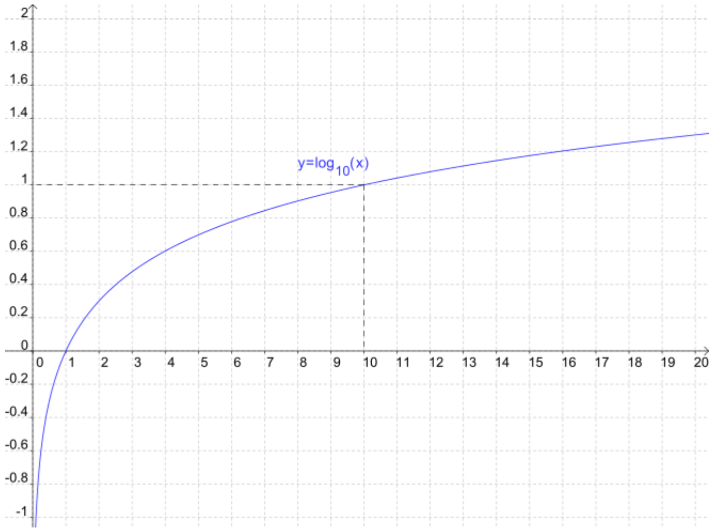
Exercice 5.1 Écrire la valeur des nombres suivants (sans calculatrice, mais écrire d'abord le nombre avec des puissances de 10) :

1. $log(10^3) =$ ....
2. $log(10^{-6}) =$ ....
3. $log(10) =$ ....
4. $log(1) =$ ....
5. $log(0,001) =$ ....
6. $log(10000) =$ ....
7. $log(0,01) =$ ....
8. $log(0,0001) =$ ....

Propriété 5.1 La fonction logarithme décimal est strictement croissante ; donc

$$a < b \Rightarrow log(a) < log(b)$$

Les images sont dans le même ordre que les antécédents.



Exercice 5.2 En utilisant exclusivement la propriété précédente, et pas une valeur approchée à la calculatrice, dire lequel est le plus grand des deux nombres suivants :

1. $log(\pi)$ et $log(3,14)$
   ....
   ....
2. $log(\sqrt{2})$ et $log(\sqrt{3})$
   ....
   ....
3. $log(3 \times 10^{-3})$ et $log(3 \times 10^{-4})$
   ....
   ....
4. $log(1,4142)$ et $log(1,4143)$
   ....
   ....
5. $log(2,56 \times 10^{-2})$ et $log(256 \times 10^{-2})$
   ....
   ....

2. Propriétés algébriques

Si on regarde l'exponentielle, les propriétés sur les puissances donnent

$$10^{a+b} = 10^a \times 10^b$$

C'est-à-dire que l'exponentielle "transforme + en ×".
En tant que réciproque, le logarithme fait l'inverse, il "transforme × en +".

Propriété 5.2

$$log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$$

On en déduit les autres propriétés du log :

Propriété 5.3 $log(a^n) = n \times log(a)$
$log(\frac{a}{b}) = log(a) - log(b)$
$log(\frac{1}{a}) = -log(a)$

Exemple d'utilisation :
$log(800) = log(8 \times 10^2) = log(2^3) + log(10^2) = 3 \times log(2) + 2 \times log(10) = 3 \times log(2) + 2 \times 1 = 3 \times log(2) + 2$

Exercice 5.3 En travaillant comme dans l'exemple ci-dessus :

1. Écrire en fonction de $log(2)$:
   (a) $log(8 \times 10^3)$
   ....
   ....
   ....
   (b) $log(1600)$
   ....
   ....
   ....
   (c) $log(0,32)$
   ....
   ....
   ....
2. Écrire en fonction de $log(3)$:
   (a) $log(27)$
   ....
   ....
   ....
   (b) $log(0,09)$
   ....
   ....
   ....
   (c) $log(0,0081)$
   ....
   ....
   ....
3. Écrire en fonction de $log(a)$:
   (a) $log(a^2 \times a^3)$
   ....
   ....
   ....
   (b) $log(\frac{a^7}{a^3})$
   ....
   ....
   ....
   (c) $log(\frac{1}{a^3})$
   ....
   ....
   ....

3. Équations, inéquations

Propriété 5.4 $log(a) = log(b)$ ssi $a = b$

Exemple d'utilisation :
Résoudre l'équation $2^x = 100$.
$2^x = 100$
$\Leftrightarrow log(2^x) = log(10^2)$
$\Leftrightarrow x \times log(2) = 2 \times log(10)$
$\Leftrightarrow x \times log(2) = 2 \times 1 = 2$
$\Leftrightarrow x = \frac{2}{log(2)}$
Le log sert à "aller chercher x quand x est en exposant".

Exercice 5.4 En s'inspirant de l'exemple, résoudre :

1. $5^x = 10$
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. $2 \times 3^x = 20$
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
3. $2000 \times 0,4^x = 3000$
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Propriété 5.5 $log(a) < log(b)$ ssi $a < b$

Exemple d'utilisation :
Résoudre l'inéquation $5^x < 0,0001$.
$5^x < 0,0001$
$\Leftrightarrow 5^x < 10^{-4}$
$\Leftrightarrow log(5^x) < log(10^{-4})$
$\Leftrightarrow x \times log(5) < -4 \times log(10)$
$\Leftrightarrow x \times log(5) < -4 \times 1$
$\Leftrightarrow x \times log(5) < -4$
$\Leftrightarrow x < \frac{-4}{log(5)}$
(On peut bien diviser des deux côtés par $log(5)$ sans changer de sens car $log(5) > 0$; attention à vérifier cela quand on divise/multiplie de chaque côté)

Exercice 5.5 En s'inspirant de l'exemple, résoudre :

1. $5^x \leqslant 10$
....
....
....
....
....
....
....
2. $5 \times 3^x \geqslant 25$
....
....
....
....
....
....
....
3. $15 \times 2^x < 8$
....
....
....
....
....
....
....

4. Exercices bilan

Exercice 5.6 Chaque semaine, le Réseau Sentinelles collecte auprès des médecins des informations permettant notamment d'estimer le nombre de cas de certains maladies (grippe, varicelle, oreillons, etc...) sur une période donnée.
On a évalué, début janvier 2020, les cas de grippe. Pendant les six premières semaines d'observation, le taux d'incidence de la grippe est modélisé par la fonction f définie sur $[0;6]$ par

$$f(t) = 24 \times 1{,}27^t$$

où t est le nombre de semaines écoulées depuis le début de l'observation.

1. Calculer le taux d'incidence de la grippe au bout de la 1ère semaine d'observation, en donner la valeur exacte.
....
....
....
....
2. Résoudre l'inéquation $24 \times 1{,}27^t > 60{,}96$
....
....
....
....
....
....
....
3. Au bout de combien de semaines le taux d'incidence de la grippe dépassera-t-il le double de celui observé la 1ère semaine ?
....
....

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Exercice 5.7 Un cabinet d'orthophonie fait le bilan de son activité. On s'intéresse au nombre de séance réalisées chaque trimestre par ce cabinet. A partir du 1er trimestre 2019, le nombre de séances d'orthophonie augmente de 3% par trimestre.
On modélise, à l'aide d'une suite géométrique (r_n) le nombre de séances par trimestre.
On donne $r_1 = 598$ au 1er trimestre 2019.

1. Dire pourquoi la raison de la suite géométrique est $q = 1,03$.
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
2. Calculer le nombre de séances réalisées au cours du 1er trimestre 2020.
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
3. Résoudre l'inéquation $598 \times 1,03^{x-1} \geqslant 800$
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
4. Les orthophonistes estiment qu'ils devront recruter un nouveau collègue lorsque le nombre de séances par trimestre dépassera 800. Quand devront-ils recruter ?
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .